

Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Breve estudio acerca de las propiedades de la función Gamma de Euler con mención al cálculo fraccionario

Trabajo voluntario para la asignatura
Series de Funciones e Integral de Lebesgue

Autor:
Eneas Romero Barroso

21 de noviembre de 2023

Índice

1. Introducción **2**

2. Propiedades fundamentales **3**

3. Unicidad de la función acorde a sus propiedades **5**

4. Aplicación en el cálculo fraccionario **7**

ANEXOS **9**

I. Demostración de la diferenciación de la función Gamma bajo signo integral 9

II. Demostración del producto escalar (2.2) 9

III. Resultado del crecimiento de la pendiente bajo condiciones de convexidad 9

IV. Demostración de la fórmula para integración reiterada de Cauchy 10

Referencias **11**

Breve estudio acerca de las propiedades de la función Gamma de Euler con mención al cálculo fraccionario

Eneas Romero Barroso

21 de noviembre de 2023

1. Introducción

La función Gamma, denotada como $\Gamma(x)$, es una extensión del factorial a números reales y complejos que desempeña un papel fundamental en diversas disciplinas matemáticas y científicas. Fue propuesta por Leonhard Euler en el siglo XVIII, quien la definió a través de la siguiente integral impropia:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \forall\, x \in \mathbb{C} \setminus \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$$

Dado que su extensión en el campo complejo se escapa del contenido de la asignatura, de ahora en adelante la abordaremos únicamente para el caso real con $x > 0$. Veamos que efectivamente, la integral impropia es convergente en dicho intervalo.

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Luego si demostramos que las dos integrales que la constituyen son ambas convergentes, tendremos lo que queremos. La primera de ellas es fácil de ver, pues si $t \in (0,1)$ se cumple que $e^{-t} < 1$ y entonces $t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$, por lo tanto

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt < \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{t^x}{x}\bigg|_0^1 = \frac{1}{x}$$

y al estar acotada es convergente. Para la segunda integral elegimos un $N > 1$ de manera que $\forall\, t > N$ se cumpla que $e^{t/2} > t^{x-1}$ (1.1), que sabemos que existe dado que el crecimiento de la exponencial supera notablemente al de cualquier polinomio. Separemos la integral en dos a partir de ese N:

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_1^N t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_N^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

La primera integral por ser continua en el intervalo $[1, N]$ está acotada. Para la segunda integral por (1.1) sabemos que $\forall\, t > N$

$$\int_N^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt < \int_N^\infty e^{-t/2}\,dt = -2e^{-t/2}\Big|_N^\infty = 2e^{-N/2}$$

y como la integral es acotada, ello implica la convergencia. Concluimos por tanto que la función Gamma está bien definida $\forall\, x > 0$.

2. Propiedades fundamentales

En esta sección veremos algunas propiedades básicas que caracterizan la función Gamma de Euler. Una de ellas es que se trata de una interpolación del factorial. Veamos que, en efecto, lo es:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt \underset{(2,1)}{=} -\frac{t^x}{e^t}\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\cdot\Gamma(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \ {}^{1}$$

$$\begin{bmatrix} u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1}\,dt \\ dv = e^{-t}\,dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

En particular, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$. Aplicando esta propiedad reiterativamente llegamos a lo siguiente:

$$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n) = n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1) = \cdots = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot\Gamma(1)$$

y hallar el valor de $\Gamma(1)$ es sencillo pues

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

por tanto, tenemos que

$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y además $\Gamma(1) = 0! = 1$.

Luego queda probado que la función Gamma interpola al factorial para los valores naturales de su dominio.

Vale la pena mencionar, pues será de utilidad más adelante, que $\Gamma(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$. Esto es fácil de probar teniendo en cuenta la Regla de Leibniz para la diferenciación bajo signo integral, que nos permite escribir (*Anexo I*) la primera derivada como

$$\Gamma'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t})\,dt = \int_0^\infty log(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

[1] Entiéndase por $\mathbb{R}^+$ el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$

y aplicando este razonamiento reiterativamente a cada una de las derivadas finalmente se prueba por inducción que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty log^k(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ donde (k) denota la derivada k-ésima.

Otra propiedad fundamental de $\Gamma(x)$ radica en ser log-convexa $\forall\, x > 0$.

Definición. Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice log-convexa en I si $log(f)$ es convexa en I. Es decir, para cada par $(x, y) \in I \times I$ y $\forall\, t \in [0, 1]$ se cumple que

$$log(f(tx + (1 - t)y)) \leq tlog(f(x)) + (1 - t)log(f(y))$$

Sabemos que si existe la segunda derivada de f entonces la convexidad de f en I es equivalente a que $f''(x) \geq 0\ \forall\, x \in I$. Entonces, sustituyendo f por $log(f)$ tenemos una condición equivalente a ser log-convexa en I si existe la segunda derivada de $log(f)$:

$$f \text{ log-convexa en } I \Leftrightarrow (log(f(x))'' \geq 0\ \forall\, x \in I$$

Desarrollando la condición obtenida vemos que

$$(log(f(x))'' = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} \geq 0 \Rightarrow f''(x)f(x) - f'(x)^2 \geq 0$$

y de aquí deducimos el siguiente resultado:

Lema. Supongamos $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al menos dos veces derivable con $f(x) \neq 0\ \forall\, x \in I$. f es log-convexa sí y solo sí $\forall\, x \in I$, $f''(x)f(x) - f'(x)^2 \geq 0$.

A continuación demostraremos que la función Gamma es log-convexa. Sea M el subespacio vectorial conformado por todos los pares de funciones continuas (f, g) de manera que la integral impropia de (2.2) es convergente. Defino el siguiente producto escalar (*Anexo II*) sobre dicho subespacio:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt \tag{2.2}$$

Consideremos ahora $f(t) = log(t)$ y $g(t) = 1$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\left(\int_0^\infty ln(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt\right)^2 \leq \int_0^\infty ln^2(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt \cdot \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

es decir, $0 \leq \Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2\ \ \forall\, x \in (0, +\infty)$ y en ese mismo intervalo $\Gamma(x) \neq\ 0$.

$$\Rightarrow\ \Gamma(x) \text{ es log-convexa } \forall\, x > 0$$

3. Unicidad de la función acorde a sus propiedades

Esta sección está destinada a la demostración del siguiente teorema:

Teorema (de Bohr-Mollerup). Supongamos que una función $f(x)$ cumple las siguientes tres condiciones

- $f(x+1) = xf(x)$
- $f(x)$ está definida $\forall\ x > 0$ y además es log-convexa.
- $f(1) = 1$

entonces $f(x) = \Gamma(x)$.

Prueba. Como hemos visto en la sección 2, la función Gamma cumple con todas las propiedades. Por la primera y la última condición se tiene que $\forall\ n \in \mathbb{N}^0,\ f(n+1) = n!$, que podemos expresarlo también como $f(n) = (n-1)!\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, como $f(x+1) = xf(x)$ dado un $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ se deduce la veracidad de

$$\begin{aligned} f(x+n) &= f(x+n-1+1) \\ &= (x+n-1)\cdot f(x+n-1) \\ &= (x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x\cdot f(x) \\ &= \left[\prod_{k=1}^{n}(x+n-k)\right]\cdot f(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

lo cual es relevante pues nos permite estudiar únicamente lo que pasa en $0 < x \leq 1$.

Sabemos además que $f(x)$ es log-convexa, luego $log(f(x))$ es una función convexa, y por el crecimiento monótono de la pendiente de dos puntos de su dominio $S_{log(f)}(a,b)$ (*Anexo III*), como $n-1 \leq x+n \leq n+1$ se tiene que

$$S_{log(f)}(n-1,n) \leq S_{log(f)}(n,x+n) \leq S_{log(f)}(n,n+1)$$

$$log(f(n)) - log(f(n-1)) \leq \frac{log(f(x+n)) - log(f(n))}{x} \leq log(f(n+1)) - log(f(n))$$

que por las propiedades de f y considerando $n \geq 2$ es lo mismo que

$$log((n-1)!) - log((n-2)!) \leq \frac{log(f(x+n)) - log(f(n))}{x} \leq log(n!) - log((n-1)!)$$

$$log(n-1) \leq \frac{log(f(x+n)) - log(f(n))}{x} \leq log(n)$$

$$xlog(n-1) + log(f(n)) \leq log(f(x+n)) \leq xlog(n) + log(f(n))$$

$$log((n-1)^x(n-1)!) \leq log(f(x+n)) \leq log(n^x(n-1)!)$$

Como $log(x)$ es una función monótona creciente

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x(n-1)!$$

Por (2.3) sabemos el valor de $f(x+n)$, entonces lo anterior se traduce en

$$(n-1)^x(n-1)! \leq \left[\prod_{k=1}^{n}(x+n-k)\right] \cdot f(x) \leq n^x(n-1)!$$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{\prod_{k=1}^{n}(x+n-k)} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{\prod_{k=1}^{n}(x+n-k)}$$

El lado izquierdo de la desigualdad podemos reescribirlo sustituyendo bajo la misma variable $n \hookrightarrow n+1$ dado que establecimos $n \geq 2$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{\prod_{k=1}^{n}(x+n-k)} = \frac{n^x n!}{\prod_{k=1}^{n+1}(x+n+1-k)} = \frac{n^x n!}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}$$

El lado derecho de la desigualdad podemos reescribirlo de manera que se parezca a la expresión anterior

$$\frac{n^x(n-1)!}{\prod_{k=1}^{n}(x+n-k)} = \frac{n^x n!}{(x+n) \cdot \prod_{k=1}^{n}(x+n-k)} \cdot \frac{x+n}{n}$$

Luego la desigualdad nos queda como

$$\frac{n^x n!}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}$$

y tomando límites cuando $n \to \infty$ nos queda, ya que $f(x)$ no depende de n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x \cdot \ldots \cdot (x+n)} \leq f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x \cdot \ldots \cdot (x+n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{n}$$

y por el teorema del sándwich finalmente

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}$$

Como Γ cumple las mismas hipótesis del teorema, de la unicidad del límite se deduce que $f(x) = \Gamma(x)\ \forall\ x \in (0,1]$, pero todavía nos queda probar que son iguales para todo $x > 0$. Para ello observemos que todo real positivo se puede expresar de la forma $x+n$ con $0 < x \leq 1$ y $n \in \mathbb{N}$, luego fijado un x en dicho intervalo me doy cuenta de que

$$f(x+1) = x \cdot f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot n^x n!}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x+1} n!}{(x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n+1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x+n+1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{x+1} n!}{(x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n+1)}$$

Acabamos de afirmar por inducción que la expresión en forma de límite es correcta más generalmente en $x \in \mathbb{R}^+$, pues puedo alcanzar una entrada de f en $(0, 1]$ desde cualquier intervalo $(n, 1+n]$. Entonces llegamos a la conclusión de que $f(x) = \Gamma(x)$ para todo $x > 0$ y con esto se concluye la prueba. □

Como corolario, durante el transcurso de la demostración hemos visto que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n)} \quad \forall\, x > 0$$

4. Aplicación en el cálculo fraccionario

A lo largo del siglo XVIII, comenzando por L'Hôpital y pasando por Fourier, surgieron las primeras preguntas acerca de aquellas derivadas de orden no entero. El propio Leibniz dejó entrever que una resolución para este problema podría plantear una serie de consecuencias útiles en el futuro.

La existencia de la función Gamma vino a resolver la mayoría de estas cuestiones. Esto se debe a que para entonces se conocía una expresión para la integración de una función de forma reiterada demostrada por Cauchy. La expresión integrando $f(x)$ n veces, cuya demostración se adjunta en el *Anexo IV*, es la siguiente

$$f^{(-n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

Una forma de extender desde los enteros a los reales pasa por extender el factorial que aparece en la fórmula. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces se tiene la siguiente generalización

$$f^{(-\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

y ello implica que podemos ampliar el concepto de operador integral (J) a todos los reales. Podemos proceder de la misma manera para el concepto de operador diferencial (D), en su forma más general, que contiene al operador integral.

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = D^{-\alpha} f(x)$$

Este último denomina operador diferintegral de Riemann-Liouville, que para valores positivos de α se trata de la derivada fraccional y para valores negativos de α es la integral fraccional.

Ejemplo. Calculemos la derivada de orden $-\dfrac{1}{2}$ de la función $f(x) = 1$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = 2\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

usando el cambio de variable $u = \sqrt{t}$ y que e^{-u^2} es par, luego

$$D^{-\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt = -\frac{2\sqrt{x-t}}{\sqrt{\pi}}\bigg|_0^x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

Podríamos profundizar más en el tema pero nos conformamos hasta aquí, pues es todo lo que nos acontece en lo que respecta a la función Gamma.

ANEXOS

I. Demostración de la diferenciación de la función Gamma bajo signo integral

Para demostrar este paso, sabemos que la Regla de Leibniz nos asegura que

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = f(x,b(x))\frac{d(b(x))}{dx} - f(x,a(x))\frac{d(a(x))}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

Si consideramos $a(x) = k,\ b(x) = 0$ y $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ se tiene que

$$\frac{d}{dx}\int_0^k t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^k \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t})\,dt$$

Tomando límites en ambos lados de la igualdad cuando $k \to \infty$ tenemos lo que queríamos demostrar. □

II. Demostración del producto escalar (2.2)

Demostremos que, efectivamente, dicha operación define un producto escalar sobre M. Para ello basta con verificar que cumple las propiedades propias de todo producto escalar. Sean las funciones $f, g, h \in M$ y $a, b \in \mathbb{R}$:

(1) $\langle af+bg, h\rangle = \displaystyle\int_0^\infty (af(t)+bg(t))h(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty af(t)h(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt +$

$+\displaystyle\int_0^\infty bg(t)h(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt = a\cdot\int_0^\infty f(t)h(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt + b\cdot\int_0^\infty g(t)h(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt =$

$= a\cdot\langle f,h\rangle + b\cdot\langle g,h\rangle$

(2) $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^\infty f(t)g(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty g(t)h(t)t^{x-1}e^{-t}\,dt = \langle g,f\rangle$

(3) $\langle f,f\rangle = \displaystyle\int_0^\infty f(t)^2t^{x-1}e^{-t}\,dt \geq 0$ ya que para el integrando $t \in (0,+\infty)$

$$\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \text{ ya que } t^{x-1} > 0 \text{ y } e^{-t} > 0 \ \ \forall\, t \in (0,+\infty)$$

Luego se trata de un producto escalar. □

III. Resultado del crecimiento de la pendiente bajo condiciones de convexidad

Teorema. Supongamos una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa en I y puntos $x, y, z \in I$ de manera que $x \leq y \leq z$. Si denotamos por $S_f(a,b) > 0$ a la pendiente de la recta que une $f(a)$ y $f(b)$ se tiene que

$$S_f(y,x) \leq S_f(x,z) \leq S_f(z,y)$$

Prueba. Como $x \leq y \leq z$, podemos escribir y en función de x y z como $y = tx + (1-t)z$ para un cierto $t \in (0,1]$. Por la convexidad de f se cumple para dicho t por definición que

$$f(y) \leq tf(x) + (1-t)f(z)$$

Manipulando la desigualdad llegamos a que

$$f(y) - f(z) \leq t(f(x) - f(z))$$

y teniendo en cuenta que $y - z = t(x - z)$ y que $y - z \leq 0$ tenemos finalmente

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq t \cdot \frac{f(x) - f(z)}{t(x - z)} = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}$$

Basta con definir la función pendiente como

$$S_f(a,b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = S_f(b,a) \geq 0$$

y como $S_f(x,z) \leq S_f(z,y)$ si $x \leq y \leq z$ queda probado entonces que

$$S_f(y,x) \leq S_f(x,z) \leq S_f(z,y)$$ □

IV. Demostración de la fórmula para integración reiterada de Cauchy

Realizaremos la prueba por inducción. Para $n = 1$ tenemos

$$f^{(-1)}(x) = \frac{1}{0!}\int_0^x (x-t)^0 f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$$

Antes de continuar la demostración debemos tener en cuenta que, como consecuencia de la Regla de Leibniz para $a(x) = 0$, $b(x) = x$ y $F(x,t) = (x-t)^n f(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)\,dt\right] &= -\frac{1}{n!}\int_0^x (x-x)^n f(x)\,dt + \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)^n f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt\end{aligned}$$

A continuación asumimos cierta la hipótesis de la fórmula de Cauchy para n, luego veamos que ocurre para el caso $n \hookrightarrow n+1$. Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$ las variables mudas de integración.

$$\begin{aligned}f^{(-(n+1))}(x) &= \int_0^x \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} f(t_{n+1})\,dt_{n+1}\ldots dt_2\,dt_1 \\ &= \int_0^x \left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{t_1} (t_n - t)^{n-1} f(t)\,dt\right] dt_1 \\ &= \int_0^x \frac{d}{dt_1}\left[\frac{1}{n!}\int_0^{t_1} (t_n - t)^n f(t)\,dt\right] dt_1 = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f(t)\,dt\end{aligned}$$

y queda entonces probada la fórmula. □

Referencias

[1] E. Artin. *The Gamma Function*. Athena Series, 1964.

[2] T.M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

[3] V.G. Sánchez. *Introducción al análisis y la geometría de las funciones convexas y aplicaciones: medidas y gradientes*. Sección 3. Trabajo fin de Máster por la Universidad de Valladolid, 2014.

[4] M. R. Martín. *Introducción al cálculo fraccionario y a los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios*. Sección 5. Trabajo fin de Grado por la Universidad Complutense de Madrid, 2020.

[5] M. R. Martín. *Las funciones Gamma de Euler-Gauss y Zeta de Riemann*. Sección 2. Trabajo fin de Grado por la Universidad Complutense de Madrid, 2020.

[6] M. Camasara (Matesmike). *¿Se puede Medio-Derivar? — Derivadas Fraccionarias*. Canal de divulgación, 2021. `https://youtu.be/6zeF9bNalmI`

[7] Wikipedia

- *Logarithmically convex function*.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmically_convex_function`
- *Gamma function*.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function`
- *Bohr-Mollerup theorem*.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Bohr-Mollerup_theorem`
- *Fractional Calculus*.
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Fractional_calculus`